LAHENDUSED 12.klass

1. *Vastus:* $\boldsymbol{a_n = 3\cdot 2^{n-1} - 2}$.

Lahendus. Paneme tähele, et jada naaberliikmete vahed

$$b_1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$$
$$b_2 = a_3 - a_2 = 10 - 4 = 6$$
$$b_3 = a_4 - a_3 = 22 - 10 = 12$$
$$b_4 = a_5 - a_4 = 46 - 22 = 24$$
$$b_5 = a_6 - a_5 = 94 - 46 = 48$$

moodustavad geomeetrilise jada algliikmega $b_1 = 3$ ning teguriga $q = 2$. Niisiis avaldub jada üldliige a_n esimese liikme ja tekkinud geomeetrilise jada esimese $n-1$ liikme summana.

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n-2} - a_{n-3}) + (a_{n-1} + a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) =$$
$$= a_1 + b_1 + b_2 + \ldots b_{n-1} = a_1 + \frac{b_1 \cdot (q^{n-1} - 1)}{q - 1} = 1 + \frac{3\cdot(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 1 + 3\cdot 2^{n-1} - 3 = 3\cdot 2^{n-1} - 2$$

2. *Vastus:* **117 ja 135**

Lahendus: Olgu otsitav kolmekohaline arv $\overline{abc}$.

1) Et korrutis $6 \cdot \overline{abc}$ on kolmekohaline, siis $a = 1$ ja $b \leq 6$ (vastasel juhul tuleb korrutis juba neljakohaline).
2) Et korrutis $6 \cdot \overline{1bc}$ jagub teguri 6 tõttu kolmega, siis ka korrutiseks saadav kolmekohaline arv jagub kolmega. Vastavalt ülesande tingimusele jaguvad kolmega nii korrutise kui ka esialgse arvu numbrite summad: $(1 + b + c) \vdots 3$.
3) Eelnevast tuleneb, et $\overline{1bc} \vdots 3$ ning sellest omakorda saame, et $(6 \cdot \overline{1bc}) \vdots 9$. Viimasest aga $(1 + b + c) \vdots 9$.
4) Kuna $b \leq 6$, siis $1 + b + c = 9$ ja jääb üle kontrollida arve 108, 117, 126, 135, 144, 153 ja 162. Ülesande tingimustele vastavad arvud 117 ja 135: $6 \cdot 117 = 702$ ja $6 \cdot 135 = 810$.

3. *Vastus:* **Akna alumine serva pikkuseks $50\sqrt{3}$ cm ja kõrgus 100 cm.**

Lahendus. Paigutame koordinaatide alguspunkti akna alumise serva keskpunkti nii, et akna alumine serv asetseks *x* – teljel. Sellise paigutuse korral lõikab parabool *x*-telge punkides $(-75;0)$ ja $(75;0)$ ning tema haripunkt asub punktis $(0;150)$. Parabooli $y = ax^2 + bx + c$ võrrandi leiame eelnevalt nimetatud kolme punkti abil võrrandisüsteemist:

$$\begin{cases} 0 = a\cdot(-75)^2 + b\cdot(-75) + c \\ 0 = a\cdot 75^2 + b\cdot 75 + c \\ 150 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 5625a - 75b + 150 \\ 0 = 5625a + 75b + 150 \Rightarrow b = 0,\ a = -\dfrac{2}{75} \\ c = 150 \end{cases}$$

Niisiis on vastava parabooli võrrand $y = -\frac{2}{75}x^2 + 150$. On selge, et suurima pindalaga ristküliku saame siis, kui tema kaks nurka asetsevad paraboolil. Olgu ühe tipu koordinaatideks $B(a;b)$ ja sellest tulenevalt teise tipu koordinaadid $A(-a;b)$. Ristküliku pindala avaldiseks saame

$$S = 2ab = 2a\cdot\left(-\frac{2}{75}a^2 + 150\right) = -\frac{4}{75}a^3 + 300a.$$

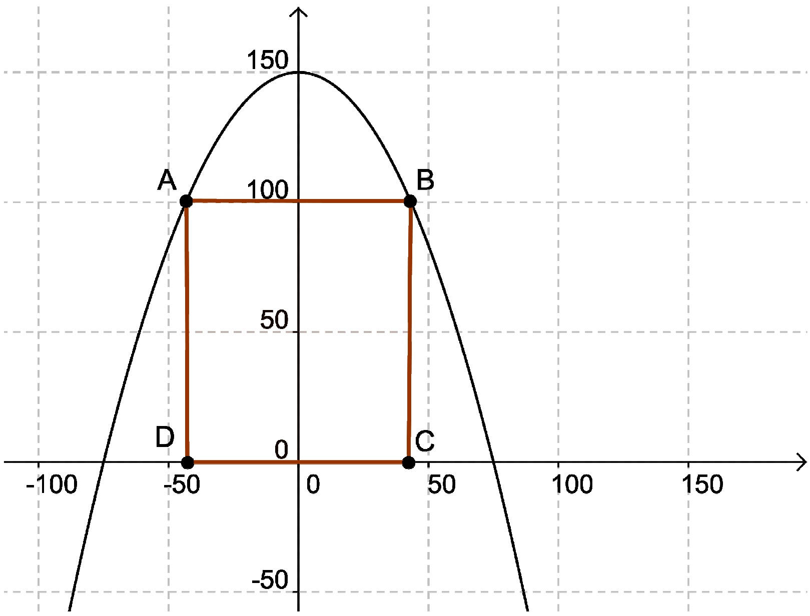
Ekstreemumkoha leiame tingimusest $S'_a = 0$.

$$S'_a = -\frac{4}{25}a^2 + 300$$

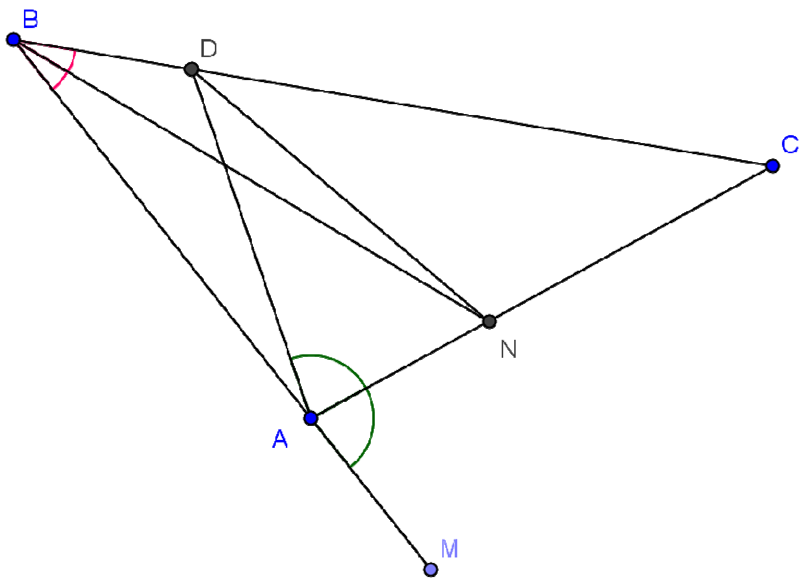
$$-\frac{4}{25}a^2 + 300 = 0$$

$$a^2 = 75\cdot 25 \quad a = 25\sqrt{3} \Rightarrow b = 100$$

Et $S''_a\left(25\sqrt{3}\right) = -\frac{8}{25}\cdot 25\sqrt{3} = -8\sqrt{3} < 0$, siis tegemist on tõesti maksimumkohaga.



4. *Tõestus.* Teeme abistava joonise.



Pikendame külge AB ja märgime pikenduse mingi punkti tähega M.
Et $\angle CAM$ on kolmnurga ABC välisnurk siis:

$$\angle CAM = \angle ABC + \angle ACB = \angle CAD \text{ (ülesande tingimuste kohaselt)}$$

Seega on AC on nurga DAM nurgapoolitaja.

Edasises tõestuskäigus kasutame asjaolu, et *nurgapoolitaja iga punkt asub samal kaugusel nurga haaradest*. Saame esitada järgmise järelduste ahela:

1) Punkt N asub samal kaugusel külgedest AD ja AM.
2) Kuna punkt N asub ka nurga $\angle ABC$ nurgapoolitajal siis kaugus punktist N külgedeni AB ja BC on sama.
3) Et AM ja BA on üks ja sama sirge, siis kaugus punktist N külgedeni AD ja BC on sama.
4) Kuna punkt D asub küljel BC, siis kaugus punktist N külgedeni AD ja DC on sama.

Viimasest järeldub, et punkt N asub nurga CDA nurgapoolitajal. Niisiis on DN nurga CDA poolitaja.

M. o. t. t.

5. *Vastus*. b) **ei**

Tõestus.

a) Jagame kõik arvud kolme gruppi selle järgi, millise jäägi nad annavad kolmega jagades. Lihtsuse mõttes tähistame kolmega jaguvate arvude arvu tähega a, kolmega jagamisel jäägi 1 andvate arvude arvu tähega b ning kolmega jagamisel jäägi 2 andvate arvude arvu tähega c.

Et kõik grupi *a* arvud jaguvad kolmega, iga grupi *b* ja *c* kolme arvu summa jagub kolmega ning ühe grupi *b* ja ühe grupi *c* arvu summa jagub 3-ga, siis on piisav näidata, et peale kahe arvu kustutamist $|b-c|$ jagub kolmega.

Edasi vaatleme juba kõiki variante.

1) Kui b ja c mõlemad jaguvad kolmega, siis grupis *a* on vähemalt 2 arvu (2012 : 3 = 670, jääk 2) ning pärast kahe grupi *a* arvu kustutamist $|b-c|$ jagub 3-ga.
2) Kui *b* ja *c* mõlemad annavad jäägi 1 või 2, siis saame kustutada ühe arvu grupist *b* ja ühe grupist *c*.
3) Kui *b* jagub kolmega ja *c* annab jäägi 1, siis annab ka *a* jäägi 1 (2012 : 3 = 670, jääk 2) ning kustutada saame ühe arvu grupist *a* ja ühe grupist *c*.
4) Kui *b* jagub kolmega ja *c* jagub annab jäägi 2, siis saame kustutada 2 arvu grupist *c*.
5) Kui *b* annab jäägi 1 ja *c* jäägi 2, siis annab *a* jäägi 2 ning kustutada saame ühe arvu grupist *a* ja ühe grupist *c*.

Kõik variandid on uuritud, seega on ükskõik millise naturaalarvude valiku puhul võimalik kustutada kaks arvu nii, et ülejäänud arvude summa jagub kolmega.

M. o. t. t.

a) Eelnev väide 2013 puhul ei kehti. Kui valida 2013 kolmega jagamisel jäägi 1 andvat arvu, siis kahe arvu kustutamisel jääb järele 2011 arvu. Et 2011 annab kolmega jagamisel jäägi 1, siis tahvlile jääb 2011 3-ga jagamisel jäägi 1 andvat arvu. Nende summa annab kolmega jagamisel samuti jäägi 1.

HINDAMINE

1.	Naaberliikmete vahede uurimise eest	2p
	Mõistmise, et vahe moodustavad geomeetrilise jada, eest	2p
	Üldliikme avaldise leidmise eest	3p
		7p

2.	Sajaliste numbri $a=1$ määramise eest	1p
	Kümneliste numbri piirangu $b \le 6$ määramise eest	1p
	Ristsumma kolmega jaguvuse kindlakstegemise eest	1p
	Ristsumma üheksaga jaguvuse kindlakstegemise eest	1p
	Ülesande tingimustele vastavate eest kokku	3p
		7p

Märkus. Õpilane ei pruugi märgata, et ristsumma jagub lisaks kolmele ka üheksaga. Kui kõik võimalikud variandid on vaadeldud, siis anda 7p. Sama kehtib ka kümneliste numbri piirangu $b \le 6$ kohta. Iga õige ja ammendava lahenduse eest anda 7p. Ainult täielikult õige vastuse (mõlemad arvud) eest anda 1p.

3.	Akna (parabooli) mugava paigutuse eest koordinaatteljestikku	1p
	Parabooli võrrandi leidmise eest	1p
	Ristküliku õige paigutuse eest	1p
	Ristküliku pindala avaldise leidmise eest	1p
	Ekstreemumkoha leidmise eest	1p
	Maksimumkoha kontrolli eest	1p
	Korrektse vastuse esitamise eest	1p
		7p

4.	Külje *BC* pikendamise eest	1p
	Nurkade *CAM* ja *CAD* võrdsuse näitamise eest	2p
	Nurgapoolitaja omaduse kasutamine nurga *ABC* puhul eest	1p
	Nurgapoolitaja omaduse kasutamine nurga *DAM* puhul eest	1p
	Tõestuse, et punkt *N* asub nurga *ADC* nurgapoolitajal eest	2p
		7p

5.	Ülesande a) osa täieliku lahenduse eest	5p
	Ülesande b) osa lahenduse eest	2p
		7p

Märkus. Ülesande a) osas anda 1p, kui on õpilane mõistab, et arvud võib jagada jäägigruppidesse; 1p, kui õpilane mõistab, et summa asemel võib vaadelda jäägigrupi arvude arvu.
Ülesande b) osas ilma põhjenduseta õige vastuse eest anda 0p.